

## Tavole di verità e proprietà dell'algebra booleana

Combinando in vario modo gli enunciati semplici del tipo **p, q, r, ...** e i connettivi **and, or** e **not** si possono ottenere enunciati composti sempre più complessi.

Quando gli enunciati **p, q, r, ...** che formano un enunciato composto **P(p, q, r, ...)** sono variabili, l'enunciato che si ottiene viene chiamato **forma enunciativa**. Il valore di verità di una forma enunciativa è noto quando lo sono i valori di verità delle sue variabili. Un modo semplice e schematico per mostrare questo rapporto è quello di costruire una **tavola di verità**.

Si consideri, per esempio, la forma enunciativa **not(p and not q)**.

La tavola di verità si costruisce nel seguente modo:

p	q	not q	p and not q	not(p and not q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Le prime due colonne indicano tutte le combinazioni dei valori che possono essere assunti dalle variabili **p** e **q**: ci sono tante righe quante sono queste combinazioni (con due variabili sono necessarie quattro righe, con tre variabili otto righe, ... con  $n$  variabili  $2^n$  righe). Segue una colonna per ogni operazione indicata nella forma enunciativa. La sequenza con cui costruire le diverse colonne è definita dalla seguente regola: si procede dalle parentesi più interne verso l'esterno ed entro la medesima parentesi l'ordine di esecuzione delle operazioni è: **not, and, or**. Alla fine si ottiene il valore di verità della forma enunciativa.

**Esempio:** Si trovi la tavola di verità della forma enunciativa **p or (q and r)**

p	q	r	q and r	p or (q and r)
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

## EQUIVALENZA LOGICA E PROPRIETÀ DELL'ALGEBRA BOOLEANA

Si dice che due forme enunciative sono equivalenti quando hanno la medesima tavola di verità.

**Esempio:** Si dimostri che le forme enunciative **(p and q) or not p** e **not p or q** sono equivalenti.

Tavola di verità di **(p and q) or not p**:

p	q	p and q	not p	(p and q) or not p
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Tavola di verità di **not p or q**:

<b>p</b>	<b>q</b>	<b>not p</b>	<b>not p or q</b>
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Poiché le due forme enunciative hanno la medesima tavola di verità possiamo dire che sono equivalenti e si scrive: **(p and q) or not p  $\equiv$  not p or q**.

Attraverso le equivalenze logiche si possono esprimere le **leggi** (o *proprietà*) dell'algebra booleana. Nella tabella seguente vengono riportate alcune tra le più significative:

Idempotenza	
<b>p or p <math>\equiv</math> p</b>	<b>p and p <math>\equiv</math> p</b>

Associatività	
<b>(p or q) or r <math>\equiv</math> p or (q or r)</b>	<b>(p and q) and r <math>\equiv</math> p and (q and r)</b>

Commutatività	
<b>p or q <math>\equiv</math> q or p</b>	<b>p and q <math>\equiv</math> q and p</b>

Distributività	
<b>p or (q and r) <math>\equiv</math> (p or q) and (p or r)</b>	<b>p and (q or r) <math>\equiv</math> (p and q) or (p and r)</b>

Doppia negazione	
<b>not not p <math>\equiv</math> p</b>	

Leggi di De Morgan	
<b>not (p or q) <math>\equiv</math> not p and not q</b>	<b>not (p and q) <math>\equiv</math> not p or not q</b>

Si noti che le **leggi di De Morgan** trovano riscontro anche nel linguaggio quotidiano.

### Esempio

Si prenda in considerazione la frase

"Se piove o tira vento, esco con l'impermeabile".

Ponendo **p**="piove" e **q**="tira vento", si può schematizzare la frase precedente così:

"Se **p or q**, esco con l'impermeabile".

Volendo indicare la condizione opposta alla precedente, si può scrivere:

"Se **not (p or q)**, non esco con l'impermeabile"

Ma per la legge di De Morgan si può anche scrivere:

"Se **not p and not q**, non esco con l'impermeabile"

ed infatti si dice:

"Se non piove e non tira vento, non esco con l'impermeabile".